



Universidade de Brasília - UnB  
Faculdade UnB Gama - FGA  
Engenharia de Energia

# **Solução da Equação de Difusão de Nêutrons Pelo Método da Derivada Fracionária**

Autor: Anne Karoline F Mendonça  
Orientador: Prof. Dr. Ronni Geraldo Gomes de Amorin

Brasília, DF  
2019





Anne Karoline Feitoza Mendonça

## **Solução da Equação de Difusão de Nêutrons Pelo Método da Derivada Fracionária**

Monografia submetida ao curso de graduação em Engenharia de Energia da Universidade de Brasília, como requisito parcial para obtenção do Título de Bacharel em Engenharia de Energia.

Universidade de Brasília - UnB

Faculdade UnB Gama - FGA

Orientador: Prof. Dr. Ronni Geraldo Gomes de Amorin

Brasília, DF

2019

---

Anne Karoline Feitoza Mendonça

Solução da Equação de Difusão de Nêutrons Pelo Método da Derivada Fracionária/ Anne Karoline Feitoza Mendonça. – Brasília, DF, 2019-

62 p. : il. (algumas color.) ; 30 cm.

Orientador: Prof. Dr. Ronni Geraldo Gomes de Amorin

Trabalho de Conclusão de Curso – Universidade de Brasília - UnB  
Faculdade UnB Gama - FGA , 2019.

1. Derivada fracionária. 2. Nêutrons. I. Prof. Dr. Ronni Geraldo Gomes de Amorin. II. Universidade de Brasília. III. Faculdade UnB Gama. IV. Solução da Equação de Difusão de Nêutrons Pelo Método da Derivada Fracionária

CDU 02:141:005.6

---

Anne Karoline Feitoza Mendonça

## **Solução da Equação de Difusão de Nêutrons Pelo Método da Derivada Fracionária**

Monografia submetida ao curso de graduação em Engenharia de Energia da Universidade de Brasília, como requisito parcial para obtenção do Título de Bacharel em Engenharia de Energia.

Trabalho aprovado. Brasília, DF, 29 de novembro de 2019:

---

**Prof. Dr. Ronni Geraldo Gomes de  
Amorin**  
Orientador

---

**Prof. Dr. Roseany de Vasconcelos  
Vieira Lopes**  
Convidado 1

---

**Prof. Dr. Leandro Xavier Cardoso**  
Convidado 2

Brasília, DF  
2019



*Este trabalho é dedicado a todos aqueles que acreditaram,  
todos que pensaram em desistir e não desistiram.*





# Agradecimentos

Agradeço a Deus que me deu força e não me deixou desistir e com sua infinita misericórdia me sustentou até aqui. A minha família que compreendeu as ausências e sempre me apoiou, ao meu namorado que não me deixou sozinha nessa empreitada. A minha mãe que sempre me incentivou com palavras de amor tentando sempre me mostrar que no final sempre vale a pena. Agradeço ao meu orientador que foi sempre paciente e buscou as melhores maneiras de me ajudar que além de um excelente profissional se tornou um bom amigo.



# Resumo

Recentemente Petersen et.al.,(2010) resolveu de forma analítica a equação da difusão de nêutrons utilizando a técnica da diagonalização de matrizes. Neste trabalho propus a resolução da mesma equação, porém, aplicando outro método o da derivação fracionária. Esse método nunca foi aplicado antes para resolução do problema proposto, assim, apresentou-se o conceito da derivada fracionária segundo Caputo e todo o ferramental necessário para a obtenção da solução da equação. O comprimento de difusão necessário para resolução foi obtido por um método totalmente analítico apresentado por Liverhant S.(1960), ao final a solução pode ser obtida por meio da variação do parâmetro  $\alpha$  da derivada fracionaria juntamente com as condições de contorno estabelecidas de acordo com a geometria plana utilizada. Os resultados obtidos foram comparados com a solução proposta por Petersen et.al.,(2010).

**Palavras-chaves:** Difusão de Nêutrons, Derivada Fracionária.



# Abstract

Recently Petersen et al. (2010) analytically solve the neutron diffusion equation using a matrix diagonalization technique. In this work, we propose the resolution of the same equation, however, applying another method or fractional derivation. This method was never applied before solving the proposed problem, such as showing the concept of fractional derivative according to Caputo and all the toolset needed to use the solution of the equation. The diffusion length required for resolution was used by a fully analytical method described by Liverhant S. (1960), and the final solution can be used by varying the *alpha* parameters of the fractional derivation used with the conditions of predicted calculations according to a flat geometry used. The results obtained were compared with a solution proposed by Petersen et.al., (2010).

**Key-words:** Neutron Diffusion, Fractional Derivative.



# Lista de ilustrações

Figura 1 – Valores acumulados de geração de energia elétrica no dia 23/11/2019 em MWmed até 15:51hrs. Fonte: Operador Nacional do Sistema Elétrico - ONS. . . . .	19
Figura 2 – Difusão de nêutrons da fonte plana. A solução da Equação 1.9 se aplica a região que não contém a fonte, que está sombreada na figura (LIVERHANT, 1960). . . . .	26
Figura 3 – O caminho de zig-zag é $\lambda_a$ e a linha reta $L$ representa o comprimento da difusão térmica (LIVERHANT, 1960). . . . .	27
Figura 4 – Coluna térmica. A fonte de nêutrons esta contida na face a, b (LIVERHANT, 1960). . . . .	29
Figura 5 – Variação do fluxo através do reator. (LIVERHANT, 1960) . . . . .	32
Figura 6 – Distribuição de fluxo ao longo de uma linha através do centro de um reator nu e paralelo a um lado para o paralelepípedo, e em uma direção radial para o cilindro e esfera. (LIVERHANT, 1960) . . . . .	41
Figura 7 – Sistema de coordenadas adequado para uma montagem cilíndrica. As coordenadas são as coordenadas do cilindro $r$ , $z$ e $\theta$ . (LIVERHANT, 1960) . . . . .	42
Figura 8 – Correção da distância de extrapolação. (LIVERHANT, 1960) . . . . .	44
Figura 9 – Limite extrapolado. (LIVERHANT, 1960) . . . . .	45
Figura 10 – Função Gamma (RAMÍREZ, 2015). . . . .	47
Figura 11 – Comportamento da solução, com $\alpha = 1,75$ . . . . .	56
Figura 12 – Comportamento da solução, com $\alpha = 2,0$ . . . . .	57





## Lista de tabelas



# Sumário

	<b>Introdução</b>	<b>19</b>
<b>0.1</b>	<b>Objetivos</b>	<b>21</b>
0.1.1	Objetivos Específicos	21
<b>1</b>	<b>REFERENCIAL TEÓRICO</b>	<b>23</b>
<b>1.1</b>	<b>Nêutrons Térmicos</b>	<b>23</b>
<b>1.2</b>	<b>Difusão de Nêutrons</b>	<b>23</b>
1.2.1	Difusão de Nêutrons Térmicos	24
1.2.2	Equação da Difusão de Nêutrons	25
1.2.3	O Comprimento de Difusão Térmica	26
1.2.4	O Travesseiro Exponencial	28
1.2.5	Difusão Rápida de Nêutrons e a Equação da Idade de Fermi	29
<b>1.3</b>	<b>Equação Crítica</b>	<b>31</b>
1.3.1	Equação de Difusão Aplicada em Reator Térmico	33
1.3.2	Fonte Térmica de Nêutrons Obtida da Equação da Idade de Fermi	33
1.3.3	Equação Crítica e Flambagem do Reator	36
1.3.4	Fatores de Infiltração	38
1.3.5	Criticidade	40
1.3.6	Tamanho Crítico e Flambagem Geométrica	40
1.3.7	Correção do Comprimento da Extrapolação	43
<b>2</b>	<b>MÉTODO DA DERIVADA FRACIONÁRIA</b>	<b>47</b>
<b>2.1</b>	<b>Função Gamma</b>	<b>47</b>
2.1.1	Exemplo	48
<b>2.2</b>	<b>Função Beta</b>	<b>48</b>
<b>2.3</b>	<b>Função de Mittag-Leffler</b>	<b>49</b>
2.3.1	Função de Mittag-Leffler de Dois Parâmetros	50
2.3.2	Transformada de Laplace da Função de Mittag-Leffler	50
<b>2.4</b>	<b>Derivada Fracionária Segundo Caputo</b>	<b>51</b>
2.4.1	Exemplo	52
<b>3</b>	<b>RESULTADOS E DISCUSSÕES</b>	<b>53</b>
<b>4</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b>	<b>59</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>61</b>



# Introdução

A demanda energética vem crescendo no mundo e no Brasil não é diferente, no biênio de 2010-2011 o consumo residencial apresentou um aumento expressivo de 4,4%, o setor industrial um aumento de 3,0% e os demais setores apresentaram variações positivas de 6,4% (ROZA, 2013).

Em decorrência desse aumento a matriz energética do Brasil vem tentando se readequar a demanda crescente no país. Assim, a geração hidráulica é a predominante ocupando quase 67% da energia elétrica gerada no Brasil, conforme apresentado na Fig.1. Juntamente com esse crescimento de demanda, os esforços empregados para o aumento da geração, também, estão cada vez maiores (ROZA, 2013).

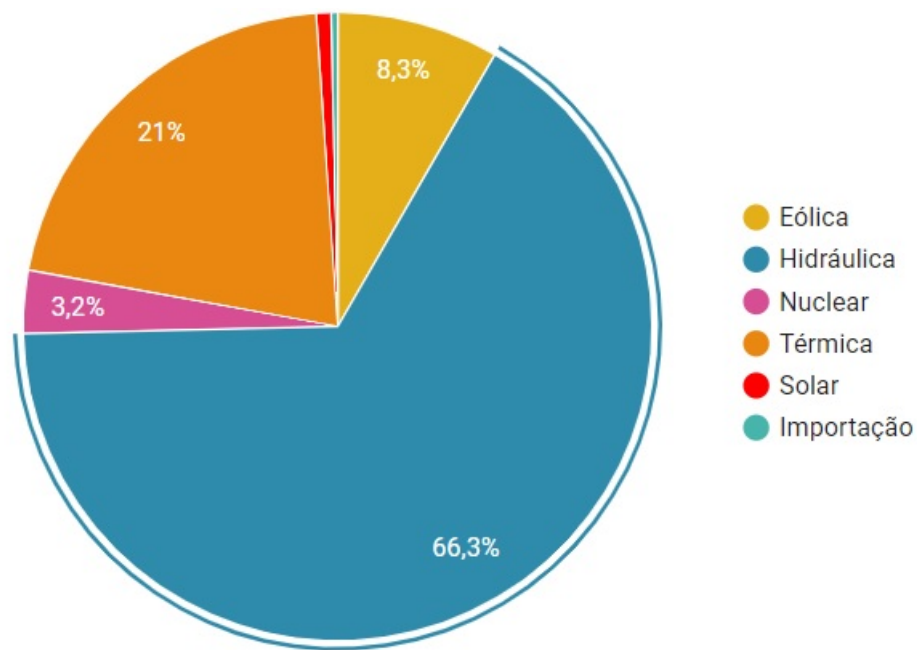


Figura 1 – Valores acumulados de geração de energia elétrica no dia 23/11/2019 em MW-med até 15:51hrs. Fonte: Operador Nacional do Sistema Elétrico - ONS.

Essa busca por aumentar a geração de energia elétrica juntamente com o descontentamento da população com as fontes térmicas convencionais que são altamente poluentes, contribuem para uma cenário mais positivo para o setor nuclear nos próximos anos. Uma vez que, esse tipo de geração não provoca emissões de gases nocivos para atmosfera, além, de estar em conformidade com as metas do Protocolo de Kyoto (PETERSEN CELINA CEOLIN, 2010), tornando-se uma geração com um pequeno impacto ambiental (ROZA, 2013).

A geração nuclear apresenta uma das melhores taxas de geração de calor quando

comparada com as outras fontes térmicas de geração de energia. Assim, suas usinas são compactas, não sazonais, isto é, são independentes de fatores climáticos, apresentam baixíssimo impacto ambiental, além, de não liberar gases nocivos durante sua operação, ainda utilizam combustíveis potentes e de baixo custo e não possuem limitações geográficas, podendo ser instaladas próximas a grandes centros urbanos (ROZA, 2013).

Essa busca pelo aumento de geração da energia elétrica, têm propiciado e impulsionado o desenvolvimento da indústria e da pesquisa na área nuclear no Brasil. Desta forma, um dos principais enfoques da pesquisa nuclear é o estudo da evolução da população de nêutrons em sistemas nucleares, o que é um grande desafio para os pesquisadores pois, apresenta grande dificuldade tanto física como matemática e constitui um problema crucial na análise de reatores nucleares. Nesse contexto, a determinação e o acompanhamento do comportamento dessa população de nêutrons no período de criticidade do reator é de extrema importância, pois, pode desenvolver métodos que possam prever o comportamento da população no núcleo do reator com precisão e confiabilidade, assim, se faz necessário a obtenção de soluções analíticas (PETERSEN CELINA CEOLIN, 2010).

Deste modo, a motivação que impulsiona o desenvolvimento dessas soluções não está apenas no âmbito da descoberta matemática, mas também, na real necessidade de se prever o desempenho e avaliar a segurança de reatores nucleares de potência, utilizados na geração de energia, tantos dos que já são empregados no mercado como dos que serão projetados no futuro. Pois, quanto maior for o número de informações, maior será o desempenho das usinas o que consequentemente aumentará a geração de energia elétrica. Além da elegância matemática que as soluções analíticas possuem por si só, esse tipo de solução elimina ou pelo menos diminui a avaliação do erro exigido por métodos numéricos (PETERSEN CELINA CEOLIN, 2010), o que torna a esse tipo de solução mais adequada quando se trata de reatores nucleares.

Nos reatores nucleares de potência, há um balanço entre o número de nêutrons por unidade de energia que é produzido por fissão e/ou espalhamento e o número de nêutrons que é perdido por captura, espalhamento e/ou fuga através do contorno (ROZA, 2013) (DUDERSTADT, 1976). Um dos principais problemas no desenvolvimento de um reator desse tipo é o cálculo do tamanho e composição do sistema requerido para manter esse balanço (PETERSEN CELINA CEOLIN, 2010). Sendo assim, para os cálculos das condições necessárias para atingir a criticidade, pode-se utilizar a teoria da difusão de nêutrons (DUDERSTADT, 1976). No caso, essa teoria leva a um problema de autovalor e autovetor, necessitando de uma solução que forneça tanto o fator de multiplicação efetivo de nêutrons (definido como maior autovetor dominante) quanto a distribuição do fluxo de nêutrons no reator (definido como o autovetor associado) (ROZA, 2013).

Então, para se obter o fator de multiplicação efetivo e a distribuição do fluxo de nêutrons deve-se resolver um problema de autovalor e autovetor, utilizando as equações,

independentes de tempo, dos modelos propostos da teoria da difusão de nêutrons. Imerso nesse contexto, este trabalho tem como objetivo resolver analiticamente a equação de difusão de nêutrons independente do tempo, em geometria cartesiana e duas dimensões.

Na literatura há vários métodos para resolução desta equação, sendo que, uma das primeiras utilizada foi o Método de Diferenças Finitas Clássico- DFC ([ALVIM, 2007](#)), outra técnica é a da Diagonalização de Matrizes ([PETERSEN CELINA CEOLIN, 2010](#)). A minha proposta é resolver a equação de difusão de nêutrons utilizando o Método da Derivação Fracionária apresentada por Caputo. O método aqui proposto não se baseia em nenhum trabalho já publicado, uma vez que, essa técnica nunca foi utilizada para resolução da equação de difusão de nêutrons. O que não exclui a utilização de outros trabalhos para comparação de resultados, a fim de, comprovar a eficiência do método aplicado.

Esse trabalho de conclusão de curso está organizado em 4 capítulos. No capítulo 1 apresentou-se a equação da continuidade de nêutrons em geometria cartesiana, juntamente com a equação crítica de um reator nuclear cilíndrico, explorando formas de obtenção da criticidade e do fator de infiltração do reator. Já no capítulo 2 apresentou-se de forma sucinta o método da Derivada Fracionária. No capítulo 3 foi apresentada a solução da equação por meio do método proposto, comparando com os resultados obtidos por ([PETERSEN CELINA CEOLIN, 2010](#)). E finalmente no capítulo 4 apresentou-se as conclusões.

## 0.1 Objetivos

Este trabalho tem por objetivo principal a solução da equação da difusão de nêutrons independente do tempo em coordenadas cartesianas com uma fonte de nêutrons na forma de um plano infinito imerso em um moderador de extensão infinita, pelo método da derivação fracionária segundo Caputo.

### 0.1.1 Objetivos Específicos

- Comparar resultados com os resultados de outros autores para verificar a eficiência do método;
- Obter o comprimento de difusão térmica;
- Deduzir a equação da idade de Fermi;
- Examinar o efeito da difusão de nêutrons nas características de multiplicação de nêutrons de um reator nuclear de tamanho finito;
- Solucionar a equação da idade de Fermi pelo método da separação de variáveis;

- Apresentar as condições críticas para um reator térmico para o qual a densidade de desaceleração do nêutron é determinada pela equação da idade de Fermi;
- Apresentar o fator de criticidade de um reator nuclear.



# 1 Referencial Teórico

## 1.1 Nêutrons Térmicos

Um reator nuclear é a fonte mais abundante de nêutrons térmicos, esses são os nêutrons que estão em equilíbrio térmico com seu entorno imediato. Eles derivam o nêutron de fissão rápida no reator que é construído para dissipar sua alta energia inicial através de inúmeras colisões com outros materiais que são incorporados em um tipo comum de reator para esta finalidade. (LIVERHANT, 1960)

São os nêutrons térmicos que são utilizados para dar início ao processo de fissão e possuem energia aproximada de 0,025ev. Esses nêutrons são capazes de fornecer uma energia de excitação maior que a energia de ativação podendo portanto, produzir fissão. (LIVERHANT, 1960)

Os reatores que são projetados para que quase todas as fissões de nêutrons ocorram com nêutrons de energias térmicas são chamados de reatores térmicos.(LIVERHANT, 1960)

## 1.2 Difusão de Nêutrons

Em um reator nuclear onde há uma agregação de um número muito grande de nêutrons, a difusão de nêutron - passagem líquida de nêutrons de regiões com densidades mais altas de nêutrons para regiões com densidades mais baixas - deve desempenhar um papel significativo no quadro geral do comportamento dos nêutrons. Portanto, a difusão de nêutrons é uma consequência da densidade não uniforme de nêutrons no conjunto do reator (LIVERHANT, 1960).

Divide-se, então, os nêutrons presentes em um reator em dois grupos principais, grupo (i) nêutrons termizados ou térmicos e grupo (ii) nêutrons rápidos que são os nêutrons que ainda não atingiram o equilíbrio térmico com o ambiente. Feita essa divisão é possível descrever o processo de difusão para cada um dos grupos separadamente (LIVERHANT, 1960).

A teoria da difusão no estágio pré-térmico ou de desaceleração é mais complexa que a difusão dos nêutrons no estágio térmico, pois, além de um fluxo de nêutrons no espaço, também é necessário lidar com um fluxo simultâneo de nêutrons no "espaço de energia". Assim, é preciso utilizar uma função de distribuição completa para esse tipo de nêutrons, sendo que, a mesma deve conter uma descrição da dependência espacial e energética da densidade de nêutrons. A equação completa de difusão que diminui a velocidade que

realiza isso satisfatoriamente em muitos aspectos é conhecida como equação da idade de Fermi (LIVERHANT, 1960).

### 1.2.1 Difusão de Nêutrons Térmicos

Para que esse problema seja simplificado os nêutrons térmicos são tratados como um grupo monoenergético. Consequentemente, considera-se que todos os nêutrons tenham a mesma energia média e que não ganhem nem perdam energia durante suas colisões com os núcleos do moderador (LIVERHANT, 1960).

A densidade de nêutrons  $n(r)$  em um dado ponto  $r(x, y, z)$  do moderador será determinada por três fatores:

1. Taxa de reprodução de nêutrons térmicos por unidade de volume,  $Q$ .
2. Taxa de absorção de nêutrons térmicos por unidade de volume,  $nv \sum a$ .
3. Taxa de vazamento ou difusão de nêutrons por unidade de volume,  $-D \nabla^2 n$ , onde,  $D$  é o coeficiente de difusão (Eq.1.1) dado pela teoria cinética

$$D = \lambda_{tr} \frac{v}{3} \quad (1.1)$$

e  $\lambda_{tr}$  é o caminho livre médio de transporte e  $v$  a velocidade apropriada de nêutrons para o grupo de nêutrons térmicos. O sinal negativo indica que o processo de difusão está na direção oposta ao do aumento da densidade de nêutrons.  $\nabla^2$  é o operador laplaciano.

A taxa líquida de aumento da densidade de nêutrons,  $\partial n / \partial t$ , é determinada pelo excesso de (1) sobre a soma de (2) e (3). Isto é,

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \text{produção} - \text{vazamento} - \text{absorção} \quad (1.2)$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial t} &= Q - (-D \nabla^2 n) - nv \sum_a \\ &= Q + \lambda_{tr} \frac{v}{3} \nabla^2 n - nv \frac{1}{\lambda_a} \end{aligned} \quad (1.3)$$

Quando se estabelece um estado estacionário a densidade de nêutrons  $n$  em qualquer ponto dentro do moderador não irá mais variar com o tempo  $t$ . Pode-se, portanto, dizer que

$$\frac{\partial n}{\partial t} = 0 \quad (1.4)$$

assim, a produção de nêutrons térmicos é equilibrada pelas perdas combinadas devido ao vazamento e absorção. Isso ocorre em todos os pontos do moderador, exceto em pontos muito próximos dos limites do moderador.

A produção de nêutrons térmicos deve ser atribuída principalmente à desaceleração dos nêutrons rápidos, de modo que possa definir  $Q$  igual à densidade de desaceleração  $q$ . Assim, reorganizando os termos da Eq.1.3 e aplicando a 1.4 a equação de estado estacionário pode ser reescrita como

$$\nabla^2 n - \frac{3}{\lambda_{tr}\lambda_a} n + \frac{3q}{v\lambda_{tr}} = 0 \quad (1.5)$$

Como  $\phi = nv$  e  $v$  são assumidos constantes, a equação de estado estacionário também pode ser descrita em termos do fluxo de nêutrons dessa forma

$$\nabla^2 \phi - \frac{3}{\lambda_{tr}\lambda_a} \phi + \frac{3q}{v\lambda_{tr}} = 0 \quad (1.6)$$

As soluções das Eq.1.5 e 1.6 podem ser encontradas para diversas situações físicas e agora será apresentado um resumo do procedimento para dois casos simples.

### 1.2.2 Equação da Difusão de Nêutrons

A difusão de um gás é fisicamente semelhante a do calor, assim, a Eq.1.6 acaba sendo muito semelhante a equação diferencial básica da condução do calor. Muitas das soluções dessa equação para diversas condições iniciais e de contorno podem, ser aplicadas á difusão de nêutrons, com uma interpretação adequada claramente (LIVERHANT, 1960).

No caso será discutido a difusão de uma fonte de nêutrons na forma de um plano infinito que emite  $Q$  nêutrons térmicos por centímetro quadrado por segundo e que é imerso em um moderador de extensão infinita conforme apresentado na Fig.2

A coordenadas mais adequada para o tratamento desta situação são as coordenadas cartesianas com o plano de origem coincidindo com o plano de coordenadas  $x = 0$ . Como a fonte se estende até o infinito nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$  o fluxo  $\phi$  depende somente de  $x$ , e a equação de estado estacionário 1.6 para regiões que não incluem a fonte ou qualquer parte dela se torna

$$\frac{d^2 \phi}{dx^2} - \frac{1}{L^2} \phi = 0 \quad (1.7)$$

com

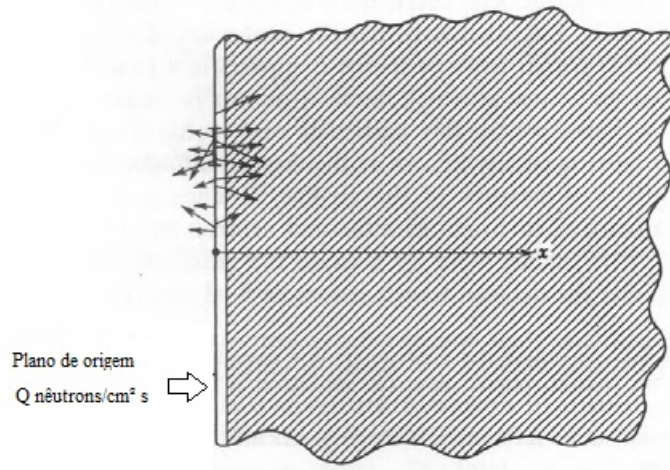


Figura 2 – Difusão de nêutrons da fonte plana. A solução da Equação 1.9 se aplica a região que não contém a fonte, que está sombreada na figura (LIVERHANT, 1960).

$$L^2 \equiv \frac{\lambda_{tr}\lambda_a}{3} \quad (1.8)$$

As condições de contorno apropriadas são determinadas pela natureza física da situação que estipula a possibilidade de  $\phi$  se tornar infinito em outro lugar, e estipula que a força da fonte na origem do sistema de coordenadas é igual à força real da fonte de nêutrons usada no experimento (LIVERHANT, 1960). Assim, a solução para a Eq.1.7 é encontrada como

$$\phi(x) = \frac{3QL}{2\lambda_{tr}} e^{-x/L} \quad (1.9)$$

ou em termos da densidade de nêutrons  $n(x)$

$$n(x) = \frac{3QL}{2v\lambda_{tr}} e^{-x/L} \quad (1.10)$$

### 1.2.3 O Comprimento de Difusão Térmica

A quantidade  $L$  introduzida e definida por 1.8 é  $3^{-1/2}$  vezes a média geométrica de  $\lambda_a$  e  $\lambda_{tr}$  e, obviamente, tem a dimensão de um comprimento. No caso de uma fonte plana de nêutrons,  $L$  aparece na Eq.1.9 e 1.10 como a distância da fonte na qual o fluxo de nêutrons é reduzido por um fator de  $1/e$  é, portanto, neste caso particular, igual ao comprimento de relaxamento. Assim,  $L$  é geralmente conhecido como comprimento de difusão térmica (LIVERHANT, 1960).

Esse comprimento é uma medida da distância da linha aérea que um nêutron viaja entre o ponto de sua origem como nêutron térmico até o ponto de sua absorção.

Será sempre menor do que 1, pois mede o zig-zag total que o nêutron viaja antes de sua absorção final (Fig.3).

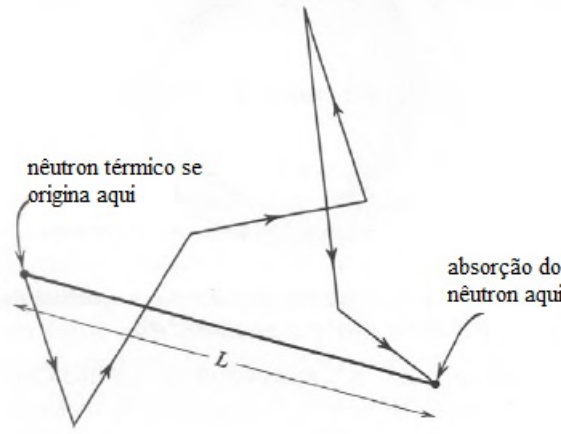


Figura 3 – O caminho de zig-zag é  $\lambda_a$  e a linha reta  $L$  representa o comprimento da difusão térmica (LIVERHANT, 1960).

Se  $N(r)$  for o número de nêutrons por segundo que penetram uma distância  $r$  da fonte sem serem absorvidos, mas não ultrapassam uma distância  $r + dr$ , pode-se dizer que  $N(r)$  representa o número de absorções de nêutrons por segundo dentro da casca esférica de espessura  $dr$  a uma distância  $r$  da fonte. A distância quadrada total para esse conjunto de nêutrons é  $N(r)r^2$ . A soma de todos os conjuntos que terminam em camadas esféricas semelhantes à medida que passam de  $r = 0$  para  $r = \infty$  e a divisão pelo número total de nêutrons emitidos pela fonte por segundo fornece o valor médio de  $r^2$ . Portanto,

$$N(r) = \phi \sum_a V$$

onde,  $V = 4\pi r^2 dr$ , de modo que  $N(r) = \phi \sum_a 4\pi r^2 dr$ , então

$$\bar{r}^2 = \frac{1}{Q} \int_0^\infty r^2 \phi \sum_a 4\pi r^2 dr \quad (1.11)$$

Substituindo o valor dado pela Eq.1.8, obtêm-se

$$\begin{aligned} \bar{r}^2 &= \frac{1}{L^2} \int_0^\infty r^3 e^{-r/L} dr \\ &= 6L^2 \end{aligned} \quad (1.12)$$

Como afirmado anteriormente  $L$  é uma medida da distância da linha aérea percorrida pelo nêutron entre o ponto de sua criação como nêutron térmico e o ponto de sua absorção. E a relação numérica entre a distancia rms percorrida e  $L$  é dada por 1.12.

O comprimento da difusão, também, pode ser medido experimentalmente, e normalmente, é diferente do valor calculado. Isso ocorre pois, as suposições feitas na derivação da equação de difusão simples são apenas aproximadamente verdadeiras na maioria dos casos. Assim, valores numéricos confiáveis podem ser obtidos apenas por meio de uma combinação criteriosa de cálculos teóricos e medições experimentais (LIVERHANT, 1960).

#### 1.2.4 O Travesseiro Exponencial

O comprimento de difusão  $L$  para um moderador pode ser obtido experimentalmente a partir de "experimentos exponenciais" usando um "travesseiro exponencial". Este é descrito como uma coluna retangular construída a partir do material do moderador com uma de suas faces contendo uma fonte de nêutrons (LIVERHANT, 1960).

O fluxo nessa coluna cai exponencialmente em um direção perpendicular a face que contém a fonte de nêutron, semelhante a 1.9.

$$\phi \sim e^{-\infty/L_1} \quad (1.13)$$

onde  $L_1$  não é o comprimento de difusão propriamente dito mas, uma constante que é uma combinação do comprimento de difusão  $L$  para o moderador e a geometria da coluna. Assim, esses se relacionam desta maneira

$$\frac{1}{L_1^2} = \frac{1}{L^2} + \frac{\pi^2}{a^2} + \frac{\pi^2}{b^2} \quad (1.14)$$

No caso a e b são as dimensões lineares da base retangular da coluna como apresentado na Fig.4.

Analisando a Eq.1.14 é possível notar que o aumento de a e b diminui a diferença entre  $L$  e  $L_1$ . Caso a e b aumente infinitamente, tem-se uma fonte infinita de nêutrons planares, com  $L$  igual a  $L_1$ . Já os dois últimos termos da Eq.1.14 representam termos de correção que devem ser aplicados quando se usa uma fonte não infinita (LIVERHANT, 1960).

A medição do fluxo na direção x é medida pela inserção de folhas de absorvedores de nêutrons, geralmente folhas de *indium*, dispostas em fendas a várias distâncias da face onde se encontra a fonte e determinando a atividade induzida na folha após períodos conhecidos de irradiação (LIVERHANT, 1960).

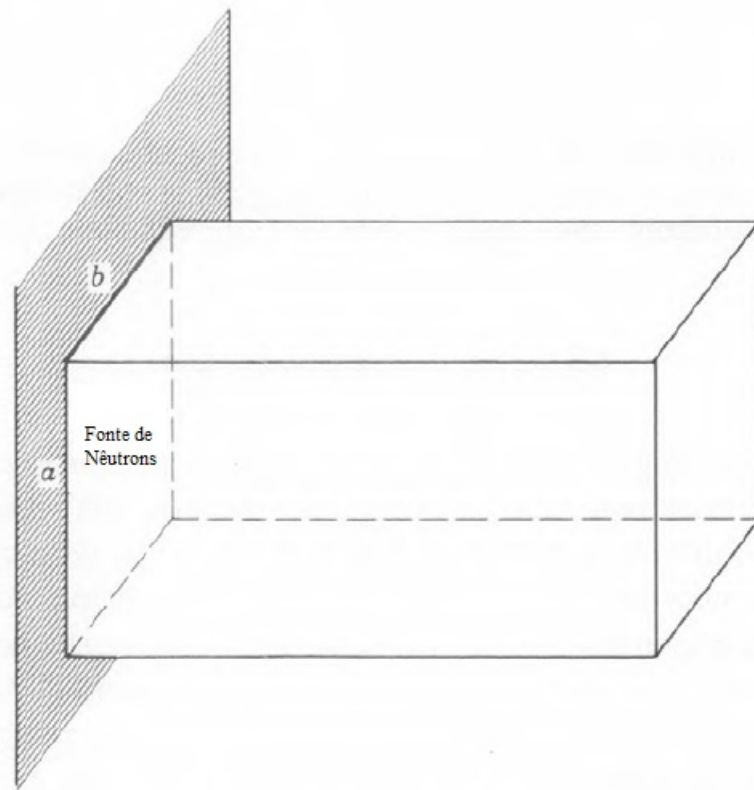


Figura 4 – Coluna térmica. A fonte de nêutrons está contida na face a, b (LIVERHANT, 1960).

### 1.2.5 Difusão Rápida de Nêutrons e a Equação da Idade de Fermi

Agora a difusão de nêutrons durante o estágio pré-térmico será tratada. Durante esta fase, os nêutrons não podem ser considerados como um conjunto de nêutrons monoenergéticos, pois, devido a desaceleração sofrem consideráveis mudanças de energia durante a difusão (LIVERHANT, 1960).

Para nêutrons que se encontram na região de desaceleração de energia, a densidade de nêutrons por intervalo de energia  $n(E)$ , depende da diferença entre a densidade de desaceleração  $q(E + \Delta E)$  no intervalo de energia  $\Delta E$  e a densidade de desaceleração  $q(E)$  fora desse intervalo (LIVERHANT, 1960).

Como mencionado anteriormente, para simplificar os cálculos, assume-se uma perda contínua de energia para um nêutron mais lento em vez de se trabalhar com o processo descontínuo real, em que um nêutron perde sua energia em quantidades finitas após uma colisão. Este procedimento implica a suposição de um grande número de colisões para um nêutron entre o tempo de sua criação como um nêutron rápido e o tempo em que atinge a energia térmica. Implica, também, a suposição de um caminho livre médio entre colisões,  $\lambda_s$ , que é essencialmente constante (LIVERHANT, 1960).

Agora tratando-se do balanço de nêutrons na região de desaceleração da energia

para um material moderador no qual não há absorção de nêutrons ( $\Sigma_a = 0$ ) nem há nêutrons sendo criados, isto é, a fonte de nêutron  $Q = 0$ .

Se o processo for iniciado com um volume unitário de moderador, no qual, inicialmente existe  $n$  nêutrons com energias  $E$  e  $E + \Delta E$ , presume-se que os únicos processos físicos que podem causar a mudança de  $n$  seja (i) difusão de nêutrons dentro ou fora do volume unitário, (ii) desaceleração dos nêutrons no intervalo de energia  $\Delta E$  e fora dele (LIVERHANT, 1960).

Como um estado estacionário deve prevalecer, de modo que o número de nêutrons no volume unitário e no intervalo de energia dados permaneçam constantes, o número de nêutrons difundindo-se fora do volume deve ser compensado por um número igual de nêutrons diminuindo e permanecendo no intervalo de energia  $\Delta E$ . Assim, o vazamento de nêutrons por difusão ao longo da coordenada espacial é compensado por um excesso de nêutrons que flui para o intervalo de energia  $\Delta E$  ao longo da coordenada de energia (LIVERHANT, 1960).

Então, a taxa de difusão de nêutrons é

$$-D \nabla^2 n = -\frac{\lambda_{tr}v}{3} \nabla^2 n \quad (1.15)$$

O número de nêutrons que desacelera no intervalo de energia  $\Delta E$  o restante é dado pelo excesso de nêutrons que fluem para  $\Delta E$  sobre o número de nêutron deixando-o.

$$q(E + \Delta E) - q(E) = \frac{\partial q}{\partial E} \Delta E \quad (1.16)$$

Relacionando a Eq.1.15 e 1.16

$$\frac{\partial q}{\partial E} \Delta E = -\frac{\lambda_{tr}v}{3} \nabla^2 n \quad (1.17)$$

Como

$$\nabla^2 q = Ev\xi \sum_s \nabla^2 n \quad (1.18)$$

Tem-se que,

$$\nabla^2 n = \frac{\nabla^2 q}{Ev\xi \sum_s} \quad (1.19)$$

Substituindo o valor de  $\nabla^2 n$  na Eq.1.17, obtêm-se

$$\frac{\partial q}{\partial E} = -\frac{\lambda_s \lambda_{tr}}{3\xi E} \nabla^2 q$$



ou,

$$\nabla^2 q = \frac{\partial q}{-\frac{\lambda_s \lambda_{tr}}{3\xi E} \partial E} \quad (1.20)$$

Esse resultado sugere a introdução de uma nova variável,  $\tau$ , de modo que

$$d\tau = -\frac{\lambda_{tr} \lambda_s}{3\xi} \frac{dE}{E} \quad (1.21)$$

com a condição que

$$\tau = \int_E^{E_0} d\tau; \quad \tau(E_0) = 0 \quad (1.22)$$

A substituição dessa nova variável em 1.20 resulta em

$$\nabla^2 q - \frac{\partial q}{\partial \tau} = 0 \quad (1.23)$$

Assim, obtêm-se a equação da idade de Fermi onde a variável  $\tau$  é a idade de Fermi ou idade dos nêutrons.

É observado a partir de 1.21 que as dimensões de  $\tau$  são de (*comprimento*)<sup>2</sup>. No caso  $\tau$  é análoga a variável de tempo na equação da condução de calor em estado não estacionário, com  $q$  ocupando o lugar da temperatura e, portanto, as soluções da equação da idade de Fermi são idênticas as soluções da equação de calor para as condições de contorno correspondentes.

No entanto, é importante ter em mente que a equação da idade de Fermi não contém a variável do tempo explicitamente, o que a caracteriza como uma equação independente do tempo ou de estado estacionário.

## 1.3 Equação Crítica

Nesta seção será examinado o efeito da difusão de nêutrons nas características de multiplicação de nêutrons de um reator nuclear de tamanho finito.

O fluxo de nêutrons térmicos é máximo próximo ao centro do reator nuclear e vai atenuando de acordo com que se aproxima das paredes do mesmo, como mostra a Fig. 5. O fluxo rápido de nêutrons apresenta um comportamento semelhante em direção as bordas do reator, isso ocorre porque um fluxo térmico mais baixo leva a uma taxa de fissão baixa, assim, tem-se uma taxa reduzida de produção de nêutrons rápidos (LIVERHANT, 1960).

Deste modo, sempre haverá uma difusão de nêutrons do centro para as bordas do reator, onde eles escaparam e serão perdidos para a montagem nuclear, o que caracteriza

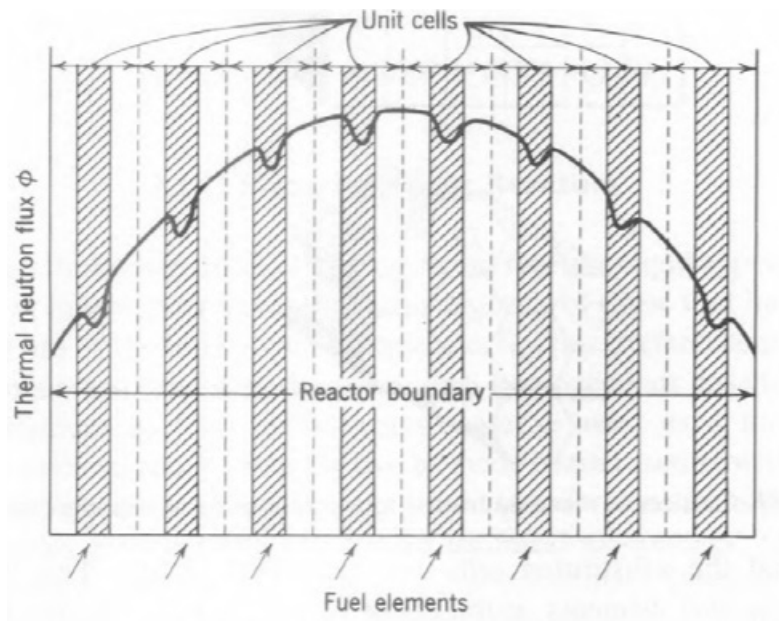


Figura 5 – Variação do fluxo através do reator. (LIVERHANT, 1960)

o efeito conhecido como vazamento de nêutrons. Como esse efeito é desvantajoso para o funcionamento de um reator busca-se sempre reduzi-lo, essa redução pode ser realizada pelo emprego de um refletor de nêutrons que envolve o núcleo ativo do reator e que reflete ou dispersa os nêutrons que tentam escapar de volta para o núcleo. A eficiência deste refletor é medida por meio de seu albedo que é descrito como a fração de nêutrons refletida de volta ao núcleo do reator de todos os nêutrons que foram incididos no refletor, isto é, a proporção de nêutrons refletidos em relação aos incidentes (LIVERHANT, 1960).

De posse dessas informações a seguir será examinado as condições de estado estacionário de um reator finito sem refletor (também conhecido como reator nu) onde uma taxa constante de fissões de nêutrons fornece uma fonte constante de nêutrons térmicos para equilibrar as perdas de nêutrons devido a: (i) absorção e (ii) vazamento. Reatores que operam nessas condições de equilíbrio entre perda e produção de nêutrons possui o chamado tamanho crítico, que o caracteriza como um reator crítico (LIVERHANT, 1960).

Para reatores nestas condições, uma relação entre suas propriedades geométricas e as propriedades do material do conjunto pode ser mantida o que resulta em um equação crítica que será obtida a seguir.

Primeiramente, assume-se uma montagem homogênea, porém, todo o raciocínio aqui desenvolvido também poderá ser aplicado a uma montagem heterogênea, onde, sua célula unitária é muito menor que as dimensões críticas do reator. Ao realizar esse tipo de consideração automaticamente as depressões locais na densidade do fluxo que ocorrem no local dos nódulos de combustível são desprezadas e apenas a variação em larga escala do fluxo através da extensão linear do reator é considerada (LIVERHANT, 1960).

### 1.3.1 Equação de Difusão Aplicada em Reator Térmico

Utilizando as considerações apresentadas anteriormente, pode-se deduzir a equação crítica para todos os tipos de reatores, homogêneos ou heterogêneos.

O processo é iniciado com a Eq.1.24, obtida no capítulo anterior

$$\nabla^2 \phi - \frac{3}{\lambda_{tr} \lambda_a} \phi + \frac{3q}{\lambda_{tr}} = 0 \quad (1.24)$$

onde a fonte de nêutrons térmicos é representada pela densidade de desaceleração  $q$ .

Isto é uma função das coordenadas espaciais  $\mathbf{r}$  e da idade de nêutrons  $\tau$ , de modo que a taxa de fornecimento de nêutrons térmicos em um dado local do reator pode ser obtida através do valor de  $q$  para uma idade de nêutrons  $\tau = \tau_{térmica} = \tau_0$ .

O primeiro passo, portanto, é encontrar o valor de  $q_{térmica}$  para ser aplicado na Eq.1.24. Esse valor pode ser obtido por meio da resolução da equação da idade de Fermi 1.25.

$$\nabla^2 q - \frac{\partial q}{\partial \tau} = 0 \quad (1.25)$$

### 1.3.2 Fonte Térmica de Nêutrons Obtida da Equação da Idade de Fermi

Como a equação a ser solucionada é uma equação diferencial parcial (EDP) suas soluções podem ser obtidas pelo método da separação de variáveis. Assim, supõe-se que a solução pode ser escrita como um produto das duas funções  $R(r)$  e  $T(\tau)$ , onde a função  $R$  depende apenas das coordenadas espaciais  $r$  e a função  $T$  depende somente de  $\tau$ . Sendo assim, as variáveis  $r$  e  $\tau$  são consideradas separáveis e pode-se definir

$$q(r, \tau) = R(r)T(\tau) \quad (1.26)$$

Tomando as segundas derivadas com relação apenas as coordenadas espaciais,

$$\nabla^2 q = T(\tau) \nabla^2 R \quad (1.27)$$

Derivando apenas em relação a  $\tau$

$$\frac{\partial q}{\partial \tau} = R(r) \frac{\partial T}{\partial \tau} \quad (1.28)$$

Substituindo a Eq.1.27 e 1.28 na Eq.1.25,

$$T(\tau) \nabla^2 R = R(r) \frac{\partial T}{\partial \tau}$$

Tem-se

$$\frac{\nabla^2 R}{R} = \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial \tau} \quad (1.29)$$

Ambos os lados da Eq. 1.29 são independentes das variáveis do outro lado. Como são iguais, cada lado é igual a uma constante,  $-\beta^2$ , portanto

$$\frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial \tau} = -\beta^2 \quad (1.30)$$

e

$$\frac{\nabla^2 R}{R} = -\beta^2 \quad (1.31)$$

Reescrevendo a Eq. 1.31

$$\nabla^2 R + \beta^2 R = 0 \quad (1.32)$$

Para esse tipo de equações temos uma solução da forma

$$T = T_0 e^{-\beta^2 \tau} \quad (1.33)$$

onde  $T_0$  é o valor de  $T$  inicialmente, quando  $\tau = 0$ . Como  $q$  diminui com o aumento da idade devido às perdas de nêutrons,  $T < T_0$ , de modo que  $\beta^2$  deve ser um número real e positivo.

A densidade de desaceleração no início do processo de desaceleração,  $q_0$ , a partir 1.26 é

$$\begin{aligned} q_0 &= R(r)T(0) \\ &= R(r)T_0 \end{aligned} \quad (1.34)$$

Pode-se expressar a mesma quantidade  $q_0$  em termos das propriedades físicas da montagem, uma vez que os símbolos matemáticos estão relacionados e representam eventos físicos definidos e específicos que estão ocorrendo no reator.

O número de nêutrons por centímetro cúbico por segundo disponível para desaceleração é dado pela taxa de produção de nêutrons de fissão. Essa taxa é igual a  $\varepsilon f \eta$  por nêutron térmico absorvido.

Então, a taxa de absorção térmica de nêutrons por centímetro cúbico do reator é  $\phi \sum_a$ , de maneira que a taxa de reprodução de nêutrons de fissão por centímetro cúbico seja

$$(\varepsilon f \eta)(\phi \sum_a)$$

Essa, também, é a taxa por centímetro cúbico no qual os nêutrons rápidos se tornam disponíveis para desaceleração, que é a mesma que a densidade inicial de desaceleração  $q_0$ . Então

$$q_0 = \phi(r) \sum_a \varepsilon f \eta \quad (1.35)$$

Como

$$q = R(r)T(\tau)$$

Da Eq.1.33

$$q = T_0 e^{-\beta^2 \tau} R(r)$$

Da Eq.1.34

$$q = q_0 e^{-\beta^2 \tau}$$

substituindo  $q_0$  na Eq.1.35

$$q = e^{-\beta^2 \tau} \phi \sum_a \varepsilon f \eta \quad (1.36)$$

Por fim, esta é a solução esperada da equação da idade de Fermi, despesando qualquer absorção de nêutrons durante o estágio pré-térmico. Porém, como ainda há uma certa quantidade de absorção de nêutrons durante a desaceleração quando se usa urânio, essa parcela tem que aparecer nos cálculos. Sendo assim, é feita uma correção por meio da multiplicação da Eq.1.36 por  $p$ . Deste modo, obtêm-se a solução para equação com a presença de absorção durante a desaceleração

$$\begin{aligned} q' &= qp = p e^{-\beta^2 \tau} \phi \sum_a \varepsilon f \eta \\ &= k_\infty \sum_a \phi e^{-\beta^2 \tau} \end{aligned} \quad (1.37)$$

Agora esse é o termo apropriado para ser usado na equação de estado estacionário 1.24 para uma fonte de nêutrons térmicos  $q$ . Substituindo esse resultado na Eq.1.24, tem-se

$$\nabla^2 \phi - \frac{3}{\lambda_{tr}\lambda_a} \phi + \frac{3k_\infty e^{-\beta^2 \tau}}{\lambda_{tr}\lambda_a} \phi = 0 \quad (1.38)$$

usando  $L^2 = 1/3\lambda_{tr}\lambda_a$

$$\nabla^2 \phi + \phi \frac{k_\infty e^{-\beta^2 \tau} - 1}{L^2} = 0 \quad (1.39)$$

### 1.3.3 Equação Crítica e Flambagem do Reator

Ainda usando a Eq.1.25 é possível mostrar que o valor numérico da constante  $\beta^2$  depende e é determinado pela distribuição do fluxo de nêutrons no interior do reator. Para esse fim, avalia-se  $\nabla^2 q'$  e  $\partial q'/\partial \tau$  para a densidade de desaceleração  $q'$ , conforme a Eq.1.37.

$$\nabla^2 q' = k_\infty \sum_a e^{-\beta^2 \tau} \nabla^2 \phi \quad (1.40)$$

$$\frac{\partial q'}{\partial \tau} = k_\infty \sum_a \phi(-\beta^2) e^{-\beta^2 \tau} \quad (1.41)$$

Reorganizando

$$\nabla^2 q' - \frac{\partial q'}{\partial \tau} = k_\infty \sum_a e^{-\beta^2 \tau} (\nabla^2 \phi + \beta^2 \phi) = 0$$

ou apenas,

$$\nabla^2 \phi + \beta^2 \phi = 0 \quad (1.42)$$

Com a distribuição de fluxo térmico  $\phi(r)$  através do reator depende do tamanho, forma e geometria geral da montagem, o valor de  $\beta^2$  é determinado pela geometria do reator. Então da Eq.1.42

$$\beta^2 = -\frac{\nabla^2 \phi}{\phi} \quad (1.43)$$

Devido sua ligação com a geometria do conjunto nuclear a constante  $\beta^2$  é chamada de flambagem geométrica e geralmente é especificada por  $\beta_g^2$ .

O termo "flambagem" é explicado pela segunda derivada de  $\phi$  dividida pela própria função  $\phi$ , que descreve a curvatura, flexão ou flambagem do fluxo de nêutrons.

Combinando as equações 1.42 e 1.39 obtêm-se um resultado importante

$$\frac{k_{\infty} e^{-\beta^2 \tau}}{1 + L^2 \beta^2} = 1 \quad (1.44)$$

Essa é a equação crítica e a parcela do lado esquerdo é o que se chama de  $k_{eff}$ , ou criticidade.

$$k_{eff} \equiv \frac{k_{\infty} e^{-\beta^2 \tau}}{1 + L^2 \beta^2} \quad (1.45)$$

A Eq.1.44 é uma equação transcendental para  $\beta^2$  e determina  $\beta^2$  em termos das propriedades físicas dos materiais do reator através de  $k_{\infty}$ ,  $\tau$  e  $L^2$ . O valor numérico de  $\beta^2$  como definido pela equação, é chamado de flambagem do material do reator e é denominado mais especificamente por  $\beta_m^2$ .

Quando o reator em estudo é classificado como crítico, como foi assumido anteriormente, a flambagem geométrica  $\beta_g^2$  é igual a flambagem  $\beta_m^2$ . Essa suposição foi feita quando as Eq.1.42 e 1.39 foram combinadas.

O valor numérico de  $\beta^2$  em 1.42 para diferentes formas/geometrias de reatores é encontrado por meio de  $\nabla^2$ , o Laplaciano, nas coordenadas mais adequadas e apropriadas, dependendo da forma do reator em estudo e resolvendo a equação diferencial resultante, sujeita as condições de contorno que se aplica ao caso em estudo. Geralmente, a escolha de  $\beta^2$  que satisfaz os requisitos matemáticos de 1.42 não é única, mas, o menor valor numérico  $\beta^2$  que satisfaz a 1.42 é o que possui significado físico para o problema. Assim, esse é o valor numérico interessado em se obter.

A partir de 1.47 é possível observar que a constante  $\beta^2$  tem as dimensões de uma área recíproca dada em  $cm^{-2}$ , pois  $\beta^2 \tau$  e  $L^2 \beta^2$  devem ser números puros.

Os valores de  $\beta^2$  também mostram que o aumento das dimensões geométricas de um reator crítico faz com que o valor numérico da flambagem geométrica - $\beta_g^2$ - diminua. Contudo, o aumento do tamanho do reator além de seu tamanho crítico resulta em um ganho maior de  $k_{eff}$  que a unidade. Por outro lado, a flambagem do material - $\beta_m^2$ - depende apenas das propriedades do material do conjunto e não muda com o tamanho do reator. Deste modo, pode-se concluir que para um reator supercrítico ( $k_{eff} > 1$ )  $\beta_m^2$  deve ser maior que  $\beta_g^2$ .

Seguindo essa linha, pode-se dizer que uma redução no tamanho que torna o reator subcrítico ( $k_{eff} < 1$ ), faz com que o  $\beta_g^2$  aumente sem causar alterações em  $\beta_m^2$ , assim, tem-se  $\beta_g^2$  maior do que  $\beta_m^2$ .

Resumindo as condições críticas para um reator térmico para o qual a densidade de desaceleração do nêutron é determinada pela equação da idade de Fermi, tem-se as

três relações a seguir:

$$\nabla^2 \phi + \beta^2 \phi = 0 \quad (1.46)$$

$$k_{eff} \equiv k_{\infty} \frac{e^{-\beta^2 \tau}}{1 + L^2 \beta^2} \quad (1.47)$$

$$= 1 \quad (1.48)$$

$$\beta_g^2 = \beta_m^2 \quad (1.49)$$

### 1.3.4 Fatores de Infiltração

Em discussões anteriores a cerca do vazamento de nêutrons os fatores de infiltração  $I_f$  e  $I_{th}$  foram introduzidos pela Eq.1.50. Esses fatores podem estar relacionados às propriedades do material da montagem de maneira direta.

$$k_{eff} = k_{\infty} l_f l_{th} \quad (1.50)$$

Para chegar a esses resultados, utiliza-se a equação de estado estacionário 1.38 e se multiplica cada termo da equação por  $-\lambda_{tr}$  e substituindo  $\lambda_a$  por  $1/\sum_a$  tem-se

$$-\frac{\lambda_{tr}}{3} \nabla^2 \phi + \sum_a \phi = k_{\infty} \sum_a \phi e^{-\beta^2 \tau} \quad (1.51)$$

sendo que, o significado físico dos termos é o mesmo apresentado anteriormente.

No termo de produção (lado direito),  $\sum_a \phi$  é a taxa de absorção térmica de nêutrons por  $cm^3$  e se multiplicada por  $k_{\infty}$ , é obtido a taxa de nêutrons de fissão produzidos por  $cm^3$ . Para um reator de tamanho infinito, todos esses nêutrons sobreviveriam através do estágio de desaceleração atingiriam as energias térmicas. Como o reator em análise é finito, não espera-se que todos esses nêutrons permaneçam dentro da montagem, pois, alguns deles irão atingir os limites do sistema e vazarão para o exterior. Assim, a probabilidade de não ocorrer infiltração é dada pela razão da taxa de produção real de nêutrons térmicos,  $k_{\infty} \sum_a \phi e^{-\beta^2 \tau}$ , sobre o máximo possível para uma reator infinito,  $k_{\infty} \sum_a \phi$ . Então,

Fator de não infiltração =

$$\frac{k_{\infty} \sum_a \phi e^{-\beta^2 \tau}}{k_{\infty} \sum_a \phi}$$



$$= e^{-\beta^2 \tau}$$

Essa é a fração de nêutrons rápidos que não vaza do conjunto durante a desaceleração e atinge as energias térmicas. Deste modo,

$$l_f = e^{-\beta^2 \tau} \quad (1.52)$$

O lado esquerdo da 1.51 representa a taxa na qual os nêutrons térmicos desaparecem do reator. Sendo assim, define-se que o fator de vazamento térmico é a fração de nêutrons térmicos que desaparece a cada segundo por  $cm^3$  através da difusão em comparação com todas as causas de desaparecimento de nêutrons térmicos. Sendo assim, a taxa de difusão térmica é dada por

Fator de vazamento térmico =

$$\frac{-\frac{1}{3}\lambda_{tr} \nabla^2 \phi}{-\frac{1}{3}\lambda_{tr} \nabla^2 \phi + \Sigma_a \phi}$$

Assim, o Fator térmico de não fuga = 1 - fator de vazamento térmico ou seja,

$$\begin{aligned} l_{th} &= 1 - \frac{-\frac{1}{3}\lambda_{tr} \nabla^2 \phi}{-\frac{1}{3}\lambda_{tr} \nabla^2 \phi + \Sigma_a \phi} \\ &= \frac{\Sigma_a \phi}{-\frac{1}{3}\lambda_{tr} \nabla^2 \phi + \Sigma_a \phi} \end{aligned}$$

Usando a Eq.1.46 para substituir  $\nabla^2 \phi$  e  $\Sigma_a$  por  $1/\Sigma_a$ , tem-se

$$\begin{aligned} l_{th} &= \frac{1}{1 + \frac{\lambda_{tr}\lambda_a}{3}\beta^2} \\ &= \frac{1}{1 + \beta^2 L^2} \end{aligned} \quad (1.53)$$

Os fatores 1.52 e 1.53 aparecem na equação de criticidade 1.47 da mesma forma, para que seja possível obter

$$k_{eff} = k_{\infty} l_f l_{th} = \frac{k_{\infty} e^{-\beta^2 \tau}}{1 + L^2 \beta^2} \quad (1.54)$$

### 1.3.5 Criticidade

Como  $\beta^2$  está relacionado às dimensões do reator nuclear, de modo que, para grandes reatores esse valor se torna muito pequeno o que permite uma expansão do termo exponencial. Caso o termo  $\tau$  também, seja pequeno, omite-se os termos que exigem valores de  $\beta^2$  maiores, com erros desprezíveis. Portanto,

$$\begin{aligned}
 k_{eff} &= k_{\infty} \frac{e^{-\beta^2 \tau}}{1 + L^2 \beta^2} \\
 &= k_{\infty} \frac{1}{e^{\beta^2 \tau} (1 + L^2 \beta^2)} \\
 &= \frac{k_{\infty}}{1 + \beta^2 (L^2 + \tau)} \tag{1.55}
 \end{aligned}$$

O valor de  $L^2 + \tau$  é indicado por  $M^2$  e é conhecido como a área de migração e  $M$  como comprimento de migração. Logo a Eq.1.55 se torna,

$$k_{eff} = \frac{k_{\infty}}{1 + \beta^2 M^2} = 1 \tag{1.56}$$

### 1.3.6 Tamanho Crítico e Flambagem Geométrica

Flambagem geométrica foi definida na seção 2.3, como o menor valor de  $\beta^2$  que satisfaz a Eq.1.46 para um fluxo de nêutrons em um reator crítico. Essa equação é conhecida em outros ramos da física como equação da onda e é possível obter suas soluções por meio do Laplaciano nas variáveis que melhor se adequam a situação física em estudo, no caso, um reator nuclear crítico, selecionando a solução que está em conformidade com as condições de contorno que se aplicam no caso.

Uma condição de contorno natural e óbvia para o caso de reatores nucleares é a nulidade do fluxo de nêutrons nas paredes do reator. Essa condição pode ser assumida, por mais, que exija uma correção que será abordada na próxima sessão.

Os reatores nucleares podem ter vários formatos distintos, desde paralelepípedos, a uma esfera ou cilindro. Assim, é necessário utilizar um sistemas de coordenadas adequado para cada formato, essas coordenadas podem ser cartesianas, esféricas ou cilíndricas. No caso, apenas os reatores cilíndricos serão tratados e analisados, uma vez, que todos as deduções são bastante parecidas mudando apenas o sistema de coordenadas.

A Eq.1.46 e a solução apropriada para o sistema de coordenadas cilíndricas estão apresentados a seguir, assim como, a comparação da distribuição de fluxos para os três formatos citadas é mostrada na Fig.6.

Cilindro de altura H e raio R:

Coordenadas cilíndricas (Fig.7) e simetria cilíndrica:

$$\nabla^2 \phi + \beta^2 \phi \rightarrow \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + \beta^2 \phi = 0 \quad (1.57)$$

Solução

$$\phi = A \cos\left(\pi \frac{z}{H}\right) J_0\left(\frac{\alpha r}{R}\right) \quad (1.58)$$

onde  $J_0$  é a função de Bessel de ordem zero e  $\alpha$  é a menor raiz,  $\alpha = 2,405$ .

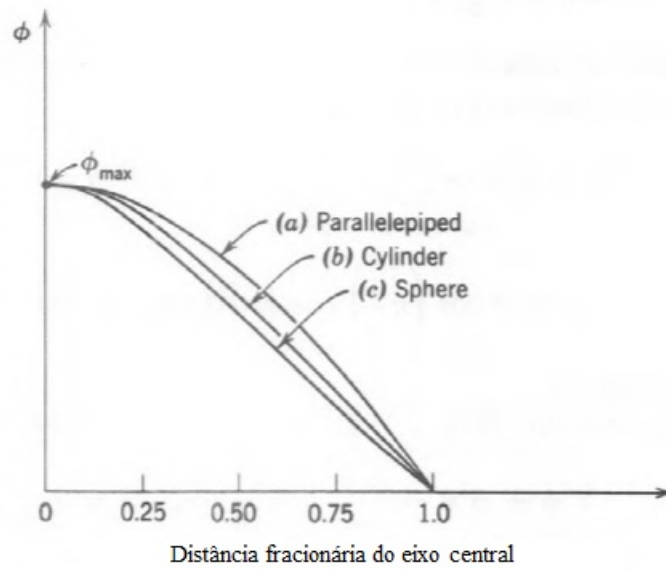


Figura 6 – Distribuição de fluxo ao longo de uma linha através do centro de um reator nu e paralelo a um lado para o paralelepípedo, e em uma direção radial para o cilindro e esfera. (LIVERHANT, 1960)

Substituindo a solução na Eq.1.46 pode-se encontrar a flambagem geométrica  $\beta^2$  para um reator cilíndrico com dimensões qualquer.

Como, o cilindro possui mais de um parâmetro para determinar o seu volume há varias maneiras de se determinar o valor de  $\beta^2$ . Uma vez que, esse conjunto particular de parâmetros fornece o volume mínimo crítico, assim, é a escolha desses parâmetros que determina a quantidade mínima de material necessário para tornar o reator crítico.

Deste modo, será determinado o volume crítico mínimo para um cilindro (Fig.7).

Primeiramente, é necessário encontrar a flambagem em termos dos parâmetros do cilindro R e H.

$$\phi = A \cos\left(\pi \frac{z}{H}\right) J_0(kr)$$

onde  $k = \frac{\alpha}{R}$  ( $\alpha = 2,405$ )

Derivando a equação anterior em relação a r, tem-se

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = k A \cos\left(\pi \frac{z}{H}\right) J'_0(kr)$$

Derivando duas vezes em relação a r

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} = k^2 A \cos\left(\pi \frac{z}{H}\right) J''_0(kr)$$

e derivando duas vezes em relação a z,

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = -A \frac{\pi^2}{H^2} \cos\left(\pi \frac{z}{H}\right) J_0(kr)$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + \beta^2 \phi &= A \cos\left(\pi \frac{z}{H}\right) k^2 J''_0(kr) \\ + \frac{k}{r} J'_0(kr) - \frac{\pi^2}{H^2} J_0(kr) + \beta^2 J_0(kr) &= 0 \end{aligned}$$

Com,

$$\beta^2 = \frac{\pi^2}{H^2} - \frac{k^2}{J_0(kr)} \left[ J''_0(kr) + \frac{J'_0(kr)}{kr} \right]$$

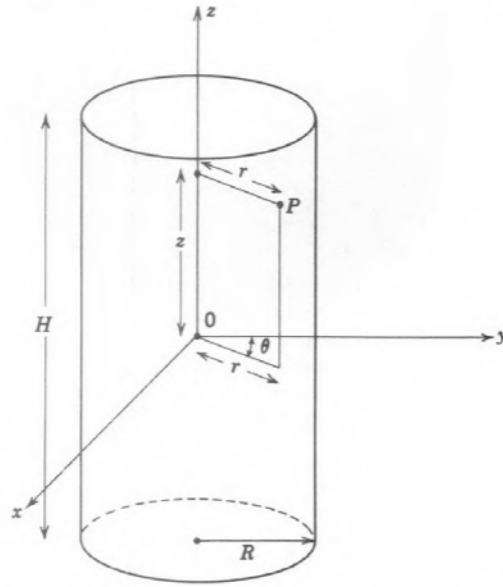


Figura 7 – Sistema de coordenadas adequado para uma montagem cilíndrica. As coordenadas são as coordenadas do cilindro r, z e  $\theta$ . (LIVERHANT, 1960)

Assim, pode-se mostrar que para a função de Bessel a expressão entre colchetes é igual a  $-J_0(kr)$ , desse modo obtém-se a flambagem geométrica de um reator cilíndrico

$$\beta^2 = \frac{\pi^2}{H^2} + k^2$$

$$= \frac{\pi^2}{H^2} + \frac{(2,405)^2}{R^2} \quad (1.59)$$

Para se obter o menor volume crítico do cilindro, é necessário minimizar seu volume  $V = \pi R^2 H$ . Substituindo  $R^2$  obtido na Eq.1.59 nesta equação, tem-se

$$V = \frac{H^3(2,405)^2}{\beta^2 H^2 - \pi^2} \quad (1.60)$$

Consequentemente,

$$\frac{dV}{dH} = \pi(2,405)^2 \frac{3H^2(\beta^2 H^2 - \pi^2) - 2\beta^2 H^4}{\beta^2 H^2 - \pi^2} = 0$$

Logo,

$$\beta^2 = \frac{3\pi^2}{H^2} \quad (1.61)$$

Ao substituir esse valor de  $\beta^2$  na Eq.1.61, obtêm-se o volume mínimo crítico igual a

$$\begin{aligned} V_{min} &= \frac{3^{3/2}}{2} \frac{(2,405)^2 \pi^2}{\beta^3} \\ &= \frac{148}{\beta^3} \end{aligned} \quad (1.62)$$

### 1.3.7 Correção do Comprimento da Extrapolação

A distribuição de fluxo de nêutrons, dada pelas expressão 1.59 para o reator em formato cilíndrico consideram nulo o fluxo de nêutrons nas paredes do reator, de acordo com as condições de contorno postuladas anteriormente.

A suposição que o fluxo seja zero na fronteira é apenas uma aproximação utilizada em reatores nucleares. Porém, o fluxo nêutrons em um limite entre um moderador onde a difusão de nêutrons está ocorrendo e o ar não poder ser estritamente zero, pois, sempre haverá um fluxo oriundo do vazamento de nêutrons do moderador através do limite pra o ar.

Deste modo, ao se resolver a equação diferencial 1.46 para um reator de qualquer forma o mais correto seria usar como condição de contorno para o fluxo de nêutrons a condição  $\phi = \phi_0$ , onde  $\phi_0$  é um pequeno mas, existente fluxo de nêutrons presente na fronteira. O valor  $\phi_0$  dependerá então, da forma do reator e geralmente é diferente em cada caso.

No entanto, em vez de trabalhar com  $\phi_0$  é muito mais conveniente utilizar uma condição de contorno para o qual o fluxo de nêutrons é nulo e reconciliar o fato experimental de fluxo diferente de zero na fronteira com a suposição matematicamente desejável e conveniente de fluxo zero. Assim, usa-se um limite hipotético a uma distância  $d$  além do limite físico real do reator, onde  $d$  é determinado por uma extrapolação linear do fluxo de nêutrons a partir de um ponto próximo ao limite do reator (Fig.8).

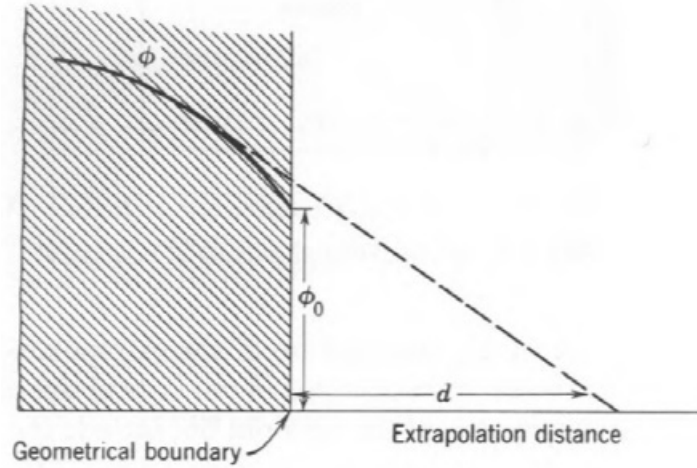


Figura 8 – Correção da distância de extrapolação. (LIVERHANT, 1960)

Essa distância além do limite físico é chamada de distância de extrapolação ou aumento. A teoria de transportes leva a um valor numérico para essa distância dado por

$$d = 0,71\lambda_{tr}$$

$$= 0,71\frac{\lambda_s}{1 - (2/3A)} \quad (1.63)$$

Essa extrapolação não corresponde a uma condição física do sistema, mas é utilizada como um dispositivo matemático para se obter uma condição de contorno conveniente para a solução da equação de difusão.

Ao introduzir a distância extrapolada, consequentemente as dimensões críticas obtidas nos cálculos de tamanho crítico não serão as dimensões físicas do material, mas, incluem o aumento da distância  $d$ , como mostrado na Fig.9.

Para se obter as dimensões físicas, a distância extrapolada  $d$  deve ser subtraída de cada limite de vácuo do moderador, como apresentado na Fig.9.

Caso  $R$  seja a distância crítica obtida a partir da equação de difusão, e  $R_m$  a distância corrigida do material, então

$$2R_m = 2R - 2d$$

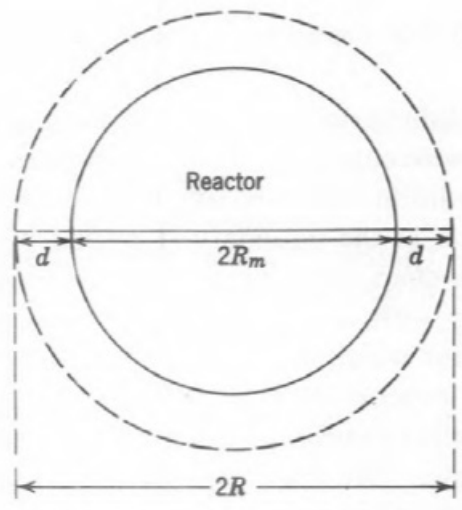


Figura 9 – Limite extrapolado. ([LIVERHANT, 1960](#))

Logo,

$$R_m = R - 0,71\lambda_{tr}$$

$$R_m = R - 0,71 \frac{\lambda_s}{1 - (2/3A)} \quad (1.64)$$





## 2 Método da Derivada Fracionária

Para que a derivada fracionária possa ser definida e aplicada se faz necessário exploração algumas funções que ajudarão a construir o conhecimento necessário para o desenvolvimento da derivada fracionária.

### 2.1 Função Gamma

A função Gamma ( $\Gamma$ ) é conhecida como uma das funções mais importantes na matemática. Essa foi apresentada pela primeira vez pelo matemático Euler em 1730, como resultado de uma pesquisa sobre uma forma de interpolação do fatorial de um número. Mais futuramente foi estudada por diversos outros matemáticos, mas, foi Adrian Marie Legendre no ano de 1809 que definiu a função gamma como descrito na Eq.2.1 (Fig.10) (RAMÍREZ, 2015).

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{(-t)} t^{x-1} dt \quad (2.1)$$

Sendo que, a Eq.2.1 só tem significado para  $x > 0$ , isto é,

$$\Gamma_{n+1} = n\Gamma(n) \rightarrow \Gamma_{n+1} = n! \quad n \in Z_+ \quad (2.2)$$

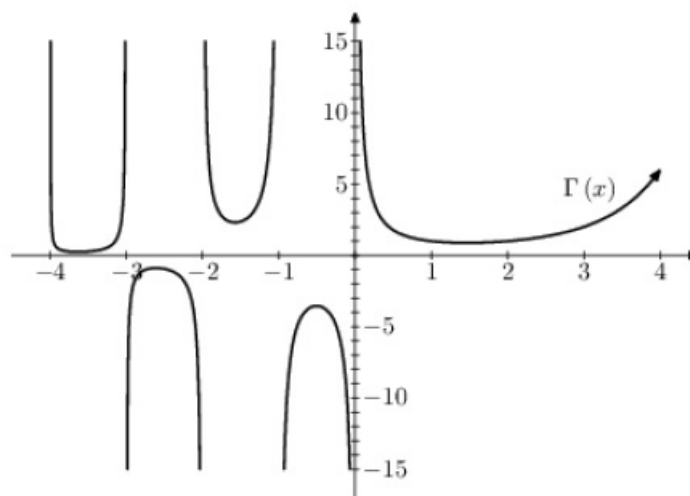


Figura 10 – Função Gamma (RAMÍREZ, 2015).

### 2.1.1 Exemplo

Utilizando a definição da função gamma apresentada anteriormente foi calculado a função para  $n = 1/2$ .

$$\Gamma_{1/2} = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{-1/2} dt$$

Mudança de variável  $t^{1/2}=x$

$$\Gamma_{1/2} = \int_0^{\infty} e^{-x^2} t^{-1/2} \frac{dx}{1/2t^{-1/2}}$$

$$= 2 \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$$

$$\Gamma_{1/2} = \sqrt{\pi}$$

## 2.2 Função Beta

A função Beta foi introduzida pela primeira vez por Euler e também é conhecida por integral de Euler de primeiro tipo. Define-se a função Beta por

$$\beta(q, p) = \int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt \quad (2.3)$$

onde  $q, p \in \mathbb{R}$ . E apresenta as seguintes propriedades:

#### 1. Comutatividade

$$\beta(q, p) = \beta(p, q)$$

#### 2. Relação entre função beta e gamma

$$\beta(q, p) = \frac{\Gamma(q)\Gamma(p)}{\Gamma(q+p)}$$

*Demonstração:* Considerando o produto

$$\Gamma(q)\Gamma(p) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{q-1} dt \int_0^{\infty} e^{-z} z^{p-1} dz \quad (2.4)$$

Introduzindo as mudanças de variáveis  $t = u^2$  e  $z = v^2$ , na Eq.2.4, pode-se escrever

$$\begin{aligned} \Gamma(q)\Gamma(p) &= 4 \int_0^{\infty} e^{-u^2} u^{2q-1} du \int_0^{\infty} e^{-v^2} v^{2p-1} dv \\ &= 4 \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-(u^2+v^2)} u^{2q-1} v^{2p-1} dudv \end{aligned}$$

Introduzindo as coordenadas polares no plano  $u = r\cos\theta$  e  $v = r\sin\theta$  onde o jacobiano da transformação é  $r$ , então  $du dv = r dr d\theta$

$$\begin{aligned}\Gamma(q)\Gamma(p) &= 2 \int_0^\infty e^{-r^2} \left\{ 2 \int_0^{\pi/2} (r\cos\theta)^{2p-1} (\sin\theta)^{2q-1} r dr d\theta \right\} \\ &= 2\beta(q, p) \int_0^\infty e^{-r^2} r^{2p+2q-1} dr\end{aligned}$$

Introduzindo agora a mudança de variável,  $r^2 = y$  e  $2r dr = dy$

$$= 2\beta(q, p) \int_0^\infty e^{-y} y^{p+q-1} dy$$

Logo,

$$\beta(q, p) = \frac{\Gamma(q)\Gamma(p)}{\Gamma(q+p)}$$

### 3. Outras formas de acordo com a transformação

$$\beta(q, p) = 2 \int_0^{\pi/2} (\sin\theta)^{2p-1} (\cos\theta)^{2q-1} d\theta$$

*Demonstração:* Pode-se representar a função beta da seguinte forma

$$\beta(q, p) = 2 \int_0^{\pi/2} (\sin\theta)^{2p-1} (\cos\theta)^{2q-1} d\theta$$

Introduzindo a mudança de  $t = \cos^2\theta$ , segue que

$$\beta(q, p) = -2 \int_{\pi/2}^0 (\cos\theta)^{2p-2} (\sin\theta)^{2q-2} \sin\theta \cos\theta d\theta$$

Como  $(\sin\theta)^{2q-2} = 1 - t$  e  $\sin\theta \cos\theta = dt = d\cos^2\theta/d\theta$

Tem-se que,

$$\beta(q, p) = 2 \int_0^{\pi/2} (\sin\theta)^{2p-1} (\cos\theta)^{2q-1} d\theta$$

## 2.3 Função de Mittag-Leffler

A função de Mittag-Leffler é conhecida como uma generalização da função exponencial. Essa função conforme introduzida por Leffler é uma função complexa que depende de um parâmetro complexo  $\alpha$ , onde  $Re(\alpha) > 0$ , na forma de uma série ([OLIVEIRA et al., 2014](#))

$$E_\alpha(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} \quad (2.5)$$

No caso em que  $\alpha = 1$ , tem-se:

$$E_1(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} = e^t$$

o que permite-se afirmar que a função de Mittag-Leffler admite, como caso particular, a função exponencial.

### 2.3.1 Função de Mittag-Leffler de Dois Parâmetros

A função de Leffler de dois parâmetros,  $E_{\alpha,\beta}(t)$  foi introduzida por Wiman e é uma função complexa que depende de dois parâmetros complexos,  $\alpha$  e  $\beta$ , onde  $Re(\alpha), Re(\beta) > 0$ , dada pela equação a seguir (OLIVEIRA et al., 2014).

$$E_{\alpha,\beta}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \quad (2.6)$$

onde  $\alpha$  e  $\beta > 0$  para que a função não divirja. Quando  $\beta = 1$  a Eq.2.6 se reduz a função de Mittag-Leffler de um parâmetro, ou seja,

$$E_{\alpha,1}(t) = E_{\alpha}(t)$$

### 2.3.2 Transformada de Laplace da Função de Mittag-Leffler

Definindo

$$L \{t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(\lambda t^{\alpha})\} = L \{tE\}$$

Tem-se que,

$$L \{tE\} = \int_0^{\infty} e^{-st} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k t^{\alpha k + \beta - 1}}{\Gamma(\alpha k + \beta)} ds$$

Como a Transformada de Laplace de  $t^n$  é  $Lt^n = \frac{n!}{s^{n+1}}$

$$\begin{aligned} L \{tE\} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \int_0^{\infty} e^{-st} t^{\alpha k + \beta - 1} dt \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \frac{\Gamma(\alpha k + \beta)}{s^{\alpha k + \beta}} \end{aligned}$$

Logo,

$$L\{tE\} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{s^{\alpha k + \beta}} = \frac{1}{s^{\beta}} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{s^{\alpha}}\right)^k$$

Como a série geométrica é dada por

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

Tem-se que,

$$L\{tE\} = \frac{1}{s^{\beta}} \frac{1}{1 - \lambda/s^{\alpha}}$$

Então a transformada de Laplace da função de Mittag-Leffler é dada por

$$L\{t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(\lambda t)\} = \frac{s^{\alpha-\beta}}{s^{\alpha} - \lambda}$$

## 2.4 Derivada Fracionária Segundo Caputo

A derivada fracionária segundo Caputo é uma integral de ordem arbitrária de uma derivada de ordem inteira. Sejam  $\alpha \in C$  e  $n = [Re(\alpha)] + 1$  o operador  $D_*^{\alpha}f(t)$  definido por

$$D_*^{\alpha}f(t) := J^{n-\alpha}D^n f(t)$$

é chamado de operador diferencial de Caputo de ordem  $\alpha$  (OLIVEIRA et al., 2014).

*Definição:* As derivadas fracionária de Caputo de ordem  $\alpha \in C$ , a esquerda e á direita são definidas, respectivamente, por  ${}_a^C D_t^{\alpha}f(t) = {}_a J_t^{n-\alpha}D^n f(t) = (-1)^n {}_a J_b^{n-\alpha}D^n f(t)$  com  $n = [Re(\alpha)] + 1$ , onde  $Re(\alpha) > 0$ , isto é,

$${}_a^C D_t^{\alpha}f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t \frac{D^n[f(u)]}{(t-u)^{\alpha-n+1}} du \quad (2.7)$$

$${}_t^C D_t^{\alpha}f(t) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \int_t^b \frac{D^n[f(u)]}{(u-t)^{\alpha-n+1}} du \quad (2.8)$$

onde,  $\alpha \in R_+^*$ ,  $a, b \in R$  e  $D^n[f(u)] = \frac{d^n f(u)}{du^n}$  é a derivada n de ordem inteira, As derivadas de Caputo são válidas para  $\alpha \in C$ , no entanto, aqui será considerado apenas  $\alpha \in R$ .

*Demonstração:* A derivada fracionária segundo Caputo da função potência, com  $\alpha \in R$  é dada por

$$D^{\alpha}[t^k] = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t \frac{\frac{d^n[u^k]}{du^n}}{(t-u)^{\alpha-n+1}} du$$

Então,

$$\begin{aligned} D^\alpha[t^k] &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t \frac{k(k-1)\dots(k-n+1)u^{k-n}}{(t-u)^{\alpha-n+1}} du \\ &= \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(k-n+1)} \int_0^t u^{k-n}(t-u)^{n-\alpha-1} du \end{aligned}$$

Realizando a troca de variáveis  $u = ty$  e assumindo  $t = 1$ , tem-se que,

$$D^\alpha[t^k] = \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(k-n+1)} \int_0^1 [y^{k-n}(1-y)^{n-\alpha-1} dy] t^{k-n} \cdot t \cdot t^{n-\alpha-1}$$

Assim,

$$D^\alpha[t^k] = \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(k-n+1)} \beta(k-n+1, n-\alpha) t^{k-\alpha}$$

Como a função beta para  $k-n+1$  é  $\beta(k-n+1, n-\alpha) = \frac{\Gamma(k-n+1)\Gamma(n-\alpha)}{\Gamma(k-\alpha+1)}$ , obtêm-se a derivada fracionária segundo Caputo.

$$D^\alpha[t^k] = \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-\alpha+1)} t^{k-\alpha} \quad (2.9)$$

### 2.4.1 Exemplo

Para  $\alpha = 1/2$ :

Aplicando a Eq.2.9, tem-se

$$D^{1/2}[t^2] = \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(5/3)} t^{3/2}$$

### 3 Resultados e Discussões

Nesta seção a equação da difusão de nêutrons bidimensional será analisada e resolvida pelo método da derivação fracionária proposta por Caputo. Como apresentado na seção 1.2.1 os nêutrons térmicos são tratados como um conjunto monoenergético com energia constante durante as colisões com os núcleos do moderador.

A partir disso a equação foi obtida considerando uma fonte de nêutrons na forma de um plano infinito imerso em um moderador de extensão infinita. Como se trata de um plano a equação foi desenvolvida em coordenadas cartesianas. Assim, obteve-se a equação a seguir

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} - \frac{1}{L^2}\phi = 0 \quad (3.1)$$

Na Eq.3.1  $\frac{1}{L^2} = \omega^2$  tornando-se

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} - \omega^2\phi = 0 \quad (3.2)$$

Colocando a equação na forma da derivada fracionária, a Eq.3.2 fica na forma

$$\frac{d^\alpha\phi}{dx^\alpha} - \omega^\alpha\phi = 0 \quad (3.3)$$

onde  $\alpha$  é o parâmetro da derivada fracionária, isto é, a ordem de derivação.

O primeiro passo para se obter a solução é aplicar a transformada de Laplace na equação 3.8

$$L \left\{ \frac{d^\alpha\phi}{dx^\alpha} \right\} - \omega^\alpha L \{ \phi \} = 0 \quad (3.4)$$

Assim,

$$s^\alpha\phi(s) - s^{\alpha-1}\phi(0) - s^{\alpha-2}\phi'(0) - \omega^\alpha\phi(s) = 0 \quad (3.5)$$

Reorganizando os termos

$$\phi(s)(s^\alpha - \omega^\alpha) = s^{\alpha-1}\phi(0) + s^{\alpha-2}\phi'(0)$$

tem-se a transformada de Laplace,

$$\phi(s) = \frac{s^{\alpha-1}}{(s^\alpha - \omega^\alpha)} \phi(0) + \frac{s^{\alpha-2}}{(s^\alpha - \omega^\alpha)} \phi'(0) \quad (3.6)$$

Agora aplica-se a transformada de Laplace da função de Mittag-Leffler apresentada na seção 2.3.2, dada por

$$L \left\{ t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(\lambda t) \right\} = \frac{s^{\alpha-\beta}}{s^\alpha - \lambda} \quad (3.7)$$

Aplicando a transformada de Mittag-Leffler na Eq.3.6

$$\phi(x) = \phi(0) E_{\alpha,1}(\omega^\alpha x) + \phi'(0) E_{\alpha,2}(\omega^\alpha x) \quad (3.8)$$

Essa é a solução para equação da difusão de nêutrons bidimensional utilizando a derivada fracionária segundo Caputo definiu.

Para que seja possível realizar uma análise gráfica desta solução, a fim de encontrar algum significado físico, é necessário obter um comprimento de difusão  $L$  arbitrário. A seção 1.2.3 apresentou detalhes a cerca desse assunto explicitando uma maneira de se encontrar  $L$ . Deste modo, será exposto a seguir o passo a passo da obtenção de  $L$  para nêutrons térmicos em grafite utilizando  $\sigma_a = 3,2mb$ ;  $\sigma_s = 4,8barns$ ;  $\rho = 1,62g/cm^3$ .

Como  $\sum_a = N_0 \sigma_a$  e  $\sum_s = N_0 \sigma_s$ , tem-se que

$$\begin{aligned} \sum_a &= 6,02 \times 10^{23} \frac{1,62}{12} \times 3,2 \times 10^{-27} \\ &= 2,61 \times 10^{-4} \text{ cm}^{-1} \end{aligned}$$

então

$$\lambda_a = 1/\sum_a = 3840 \text{ cm}$$

e,

$$\begin{aligned} \sum_s &= 6,02 \times 10^{23} \times \frac{1,62}{12} \times 4,8 \times 10^{-24} \\ &= 0,415 \text{ cm}^{-1} \end{aligned}$$

Assim, pode-se encontrar valores numéricos para  $\lambda_s$  e  $\lambda_{tr}$

$$\lambda_s = \frac{1}{\sum_s} = 2,40 \text{ cm}$$



$$\lambda_{tr} = \frac{\lambda_s}{1 - 2/3A} = \frac{2,40}{1 - \frac{2}{36}} = 2,54 \text{ cm}$$

Por fim,

$$\begin{aligned} L &= \left( \frac{\lambda_a \lambda_{tr}}{3} \right)^{1/2} \\ &= \left( 3840 \times \frac{2,54}{3} \right)^{1/2} \\ &= 57,2 \text{ cm} \end{aligned}$$

ou

$$= 0,572 \text{ m}$$

De posse do comprimento de difusão e utilizando as condições de contorno, gerou-se os gráficos apresentados em 11 e 12.

Como pode-se observar há um pico na curva antes de ocorrer uma atenuação. Isso se relaciona diretamente com uma colisão de um fluxo de nêutrons com os núcleos do moderador. Onde, no momento do choque há um pico de energia e após ele uma atenuação relacionada a dispersão de energia que ocorre após a colisão. Uma vez que, no momento em que o fluxo de nêutrons encontra um núcleo ele libera uma energia de aproximadamente 200 meV e depois desse choque ocorre a fissão e não há mais liberação de energia, o que mostra o comportamento de decaimento presente nos gráficos produzidos.

Esse é o comportamento observado em reatores térmicos onde há o emprego de nêutrons térmicos no processo de fissão. No caso, os gráficos apresentam o resultado esperado, isto é, fluxo máximo no início da placa e tendendo a zero no final, satisfazendo as condições de contorno. Como o observado por (PETERSEN CELINA CEOLIN, 2010).

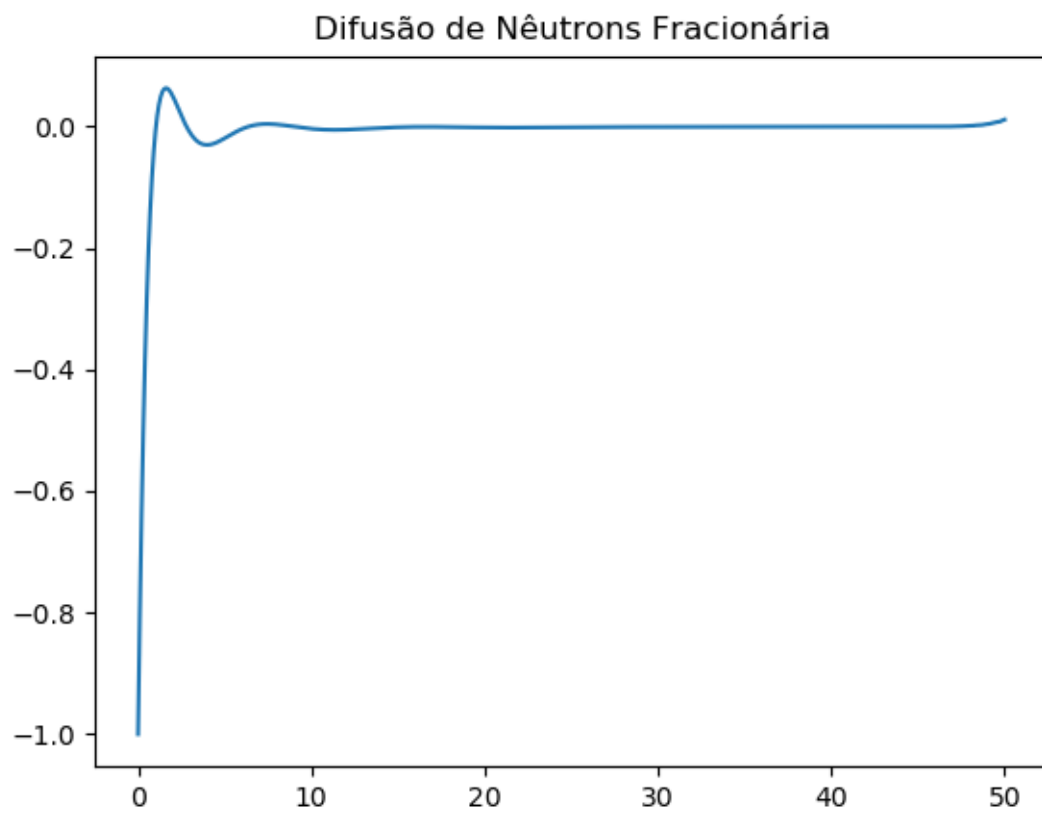


Figura 11 – Comportamento da solução, com  $\alpha = 1,75$ .

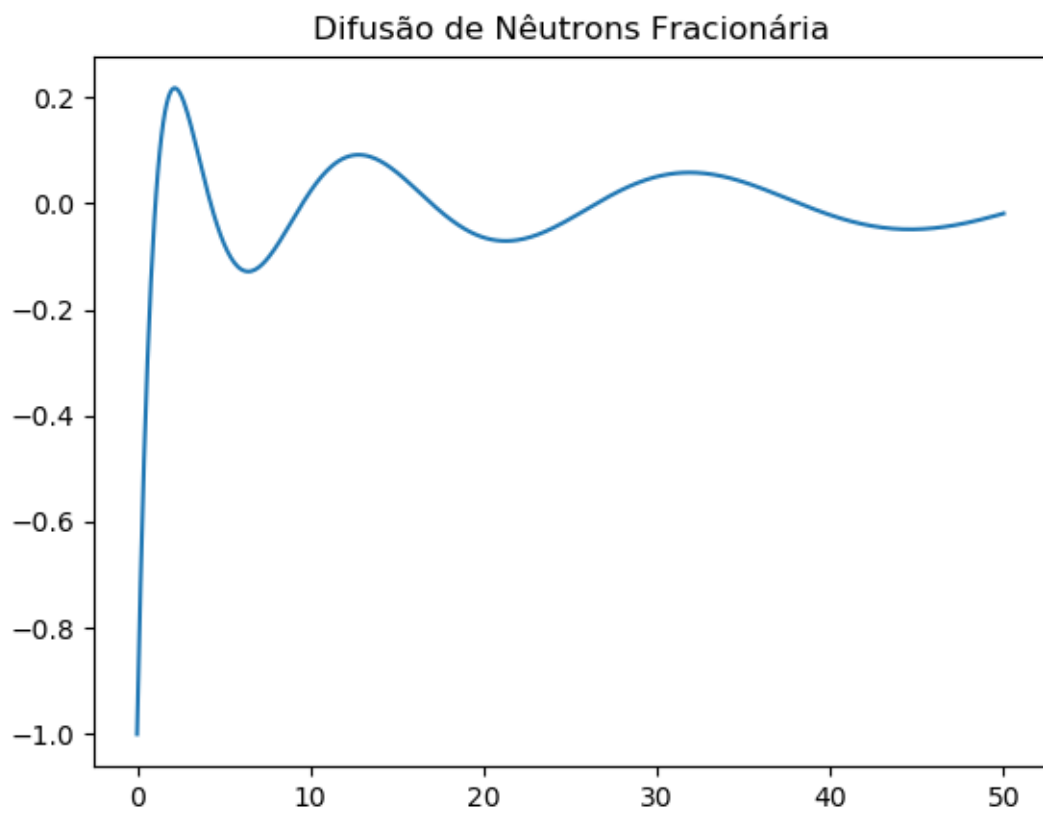


Figura 12 – Comportamento da solução, com  $\alpha = 2, 0$ .



## 4 Considerações Finais

Neste trabalho foi apresentado uma solução analítica para a equação de difusão de nêutrons. Como o caráter analítico da solução, diminui o erro referente ao método de solução da equação associada ao modelo, pode-se realizar uma melhor avaliação dos resultados e validação do modelo físico, tendo em vista o pequeno erro associado a eles.

Devido aos bons resultados obtidos na aplicação do método pode-se inferir que essa técnica pode ser usada para solução da equação, em diversas geometrias de reatores com fonte de nêutrons rápidos ou térmicos. Por ser um modo de abordagem de solução totalmente novo é importante salientar a necessidade de se avaliar a validade da equação em situações atípicas.

Os bons resultados aqui encontrados só ressalta a importância deste trabalho e suas contribuições no estudo de soluções analíticas em física de reatores.



# Referências

ALVIM, A. Metodos numericos em engenharia nuclear. 2007. Citado na página 21.

AP (Ed.). *Fundamentos da fisica dos reatores nucleares*. [S.l.: s.n.]. Nenhuma citação no texto.

BRIL, K.; KRUMHOLZ, P. Produção de óxido de tório nuclearmente puro. *Report, Instituto de Pesquisas Energéticas e Nucleares-CNEN/SP, IEA-115*, 1965. Nenhuma citação no texto.

CORK, J. M. Radioactivity and nuclear physics. D. van Nostrand, 1947. Nenhuma citação no texto.

CORRÊA, F. et al. Utilização de tório em reatores tipo pwr. *São Paulo, Instituto de Energia Atômica*, v. 126, 1977. Nenhuma citação no texto.

CRANBERG, L. et al. Fission neutron spectrum of u 235. *Physical Review*, APS, v. 103, n. 3, p. 662, 1956. Nenhuma citação no texto.

DUDERSTADT, J. J. *Nuclear reactor analysis*. [S.l.]: Wiley, 1976. Citado na página 20.

EVANS, R. D.; EVANS, R. The atomic nucleus. McGraw-Hill New York, 1955. Nenhuma citação no texto.

HANDBOOK, F. (Ed.). *Nuclear Physics and Reactor Theory*. [S.l.: s.n.]. Nenhuma citação no texto.

HÉBERT, A. *Applied reactor physics*. [S.l.]: Presses inter Polytechnique, 2009. Nenhuma citação no texto.

HUGHES, D. J.; SCHWARTZ, R. B. *Neutron cross sections*. [S.l.], 1958. Nenhuma citação no texto.

IKUTA, Á.; ABRÃO, A. Tecnologia de purificação de concentrados de tório e sua transformação em produtos de pureza nuclear: estudo do sistema th (no3) 4-hno3-nano3-tbp-varsol. 1976. Nenhuma citação no texto.

KRANE, K. S.; HALLIDAY, D. et al. *Introductory nuclear physics*. [S.l.: s.n.], 1987. Nenhuma citação no texto.

LIVERHANT, S. E. *Elementary introduction to nuclear reactor physics*. [S.l.]: Wiley, 1960. Citado 15 vezes nas páginas 13, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 41, 42, 44 e 45.

MARGUET, S. *The physics of nuclear reactors*. [S.l.]: Springer, 2018. Nenhuma citação no texto.

OLIVEIRA, D. d. S. d. et al. Derivada fracionária e as funções de mittag-leffler. [sn], 2014. Citado 3 vezes nas páginas 49, 50 e 51.

- PÉREZ, D. V. et al. Concentração total de urânio e tório em alguns solos brasileiros. *Pesquisa Agropecuária Brasileira*, v. 33, n. 8, p. 1417–1423, 1998. Nenhuma citação no texto.
- PERROTTA, J. A. Curso de introdução à engenharia do núcleo de reatores. *Instituto de Pesquisas Energéticas e Nucleares*, 1999. Nenhuma citação no texto.
- PERUZZO, J. *Física Energia Nuclear*. [S.l.]: LF - Livraria da física, 2012. Nenhuma citação no texto.
- PETERSEN CELINA CEOLIN, M. S. M. T. B. d. V. e. B. E. J. B. C. Z. Solução da equação de difusão de nêutrons em geometria retangular pela técnica da diagonalização de matrizes. *Asociacion Argentina de Mecanica Computacional*, XXIX, p. 2475–2482, nov 2010. Citado 4 vezes nas páginas 19, 20, 21 e 55.
- RAMÍREZ, J. P. S. Funcao gamma. UNICAMP, 2015. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 47.
- ROSA, L. P. Geração hidrelétrica, termelétrica e nuclear. *Estudos Avançados*, SciELO Brasil, v. 21, n. 59, p. 39–58, 2007. Nenhuma citação no texto.
- ROZA, M. P. da. *SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE DIFUSÃO DE NÊUTRONS PELO MÉTODO DE DIFERENÇAS FINITAS DE MALHA GROSSA ANALÍTICO*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 20.
- RUTHERFORD, E.; CHADWICK, J.; ELLIS, C. D. *Radiations from radioactive substances*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2010. Nenhuma citação no texto.
- SEKIMOTO, H. Nuclear reactor theory. *Center of Excellence—Innovative Nuclear Energy Systems for Sustainable Development of the World (COE-INES), Tokyo Institute of Technology, Tokyo, Japan, Part*, v. 2, 2007. Nenhuma citação no texto.
- STACEY, W. M. *Nuclear reactor physics*. [S.l.]: Wiley Online Library, 2007. v. 2. Nenhuma citação no texto.
- TERREMOTO, L. A. A. *Disciplina TNR5764 Fundamentos de Tecnologia Nuclear Reatores*. [S.l.]: São Paulo: IPEN, 2004. Nenhuma citação no texto.
- TUPINAMBÁ, G. *Análise de rotina de urânio e tório pelo método dos nêutrons retardados*. 1969. 95 p. Tese (Doutorado) — Tese (Mestrado em ciências e técnicas nucleares)—Universidade Federal de . . . , 1969. Nenhuma citação no texto.
- ZAMBONI, C. B. *Fundamentos da física de nêutrons*. [S.l.]: Editora Livraria da Física, 2007. Nenhuma citação no texto.